

Oppgave: Lineære multiporter

- a) Vis likn. (26d) i artikkelen “Quantum mechanical description of linear optics” både ved hjelp av transformasjon av skapelsesoperatorene og ved hjelp av resultatene (1) og (2) s. 1388.
- b) Vis at $\langle n0|b_2^\dagger b_2 b_1^\dagger b_1|n0\rangle = \eta(1 - \eta)n(n - 1)$ for stråledeleren (11).
- c) Hvordan kan man lage en Hadamard-port ved hjelp av en stråledeler? Bruk dobbeltspors-logikk (“dual-rail”), dvs. la logisk $|0\rangle$ være tilstanden $|10\rangle$ og logisk $|1\rangle$ være $|01\rangle$.
- d) Vis at den asymmetriske stråledeleren i fig. 3 er sin egen invers, dvs. en vilkårlig tilstand går uendret gjennom to like, etterfølgende stråledelere. Dette er et balansert Mach-Zehnder interferometer.
- e) Innfør nå et faseskift φ i modus 2 mellom de to stråledelerene, se fig. 4. La stråledelerene være 50/50, dvs. $\eta = 1/2$. Hva blir nå den logiske operasjonen til komponenten (på dobbeltspors-kvantebiten)? Hva slags port blir det når $\varphi = \pi$?

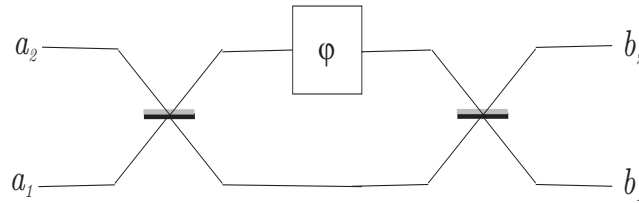


Fig. 4: Mach-Zehnder interferometer med faseskift. Merk at modus 2 er øverst (i motsetning til konvensjonen som brukes i figurene i artikkelen).

- f) I stedet for faseskiftet i forrige oppgave, sett inn et ideelt ikke-lineært Kerr-medium, se fig. 5. Dette mediet virker på følgende måte:

$$\begin{aligned} K|00\rangle &= |00\rangle \\ K|01\rangle &= |01\rangle \\ K|10\rangle &= |10\rangle \\ K|11\rangle &= -|11\rangle \end{aligned}$$

Forklar hvorfor kretsen nå virker som en CNOT-port dersom de to øverste modiene er en dobbeltspors-representasjon av “control”-kvantebiten og de to nederste er en representasjon av “target”-kvantebiten. Dersom vi ser bort fra den øverste modusen og lar de tre nederste være hver sin kvantebit (vakuump= logisk $|0\rangle$ og ett foton=logisk $|1\rangle$), forklar at kretsen virker som en Fredkin-port.

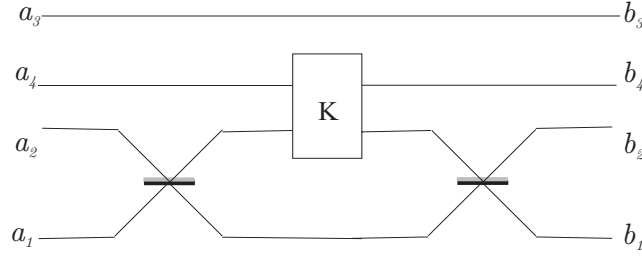


Fig. 5: CNOT-port for dobbeltspor-representasjon. Evt. kvanteoptisk Fredkin-port

Løsningsforslag

a)

$$\begin{aligned}
 U|02\rangle &= U \frac{(a_2^\dagger)^2}{\sqrt{2!}} |00\rangle = \frac{(U a_2^\dagger U^\dagger)^2}{\sqrt{2!}} U |00\rangle = \frac{(U a_2^\dagger U^\dagger)^2}{\sqrt{2}} |00\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1-\eta} a_1^\dagger - \sqrt{\eta} a_2^\dagger)^2 |00\rangle \\
 &= (1-\eta) |20\rangle + \eta |02\rangle - \sqrt{2} \sqrt{\eta} \sqrt{1-\eta} |11\rangle
 \end{aligned}$$

Alternativt: Mulige utgangstilstander er $|02\rangle$, $|20\rangle$ og $|11\rangle$. Vi får da

$$\begin{aligned}
 U|02\rangle &= \sqrt{1-\eta} \sqrt{1-\eta} |20\rangle + (-\sqrt{\eta})(-\sqrt{\eta}) |02\rangle \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2!}} [(-\sqrt{\eta})\sqrt{1-\eta} + (-\sqrt{\eta})\sqrt{1-\eta}] |11\rangle \\
 &= (1-\eta) |20\rangle + \eta |02\rangle - \sqrt{2} \sqrt{\eta} \sqrt{1-\eta} |11\rangle.
 \end{aligned}$$

b) Regn ut

$$\begin{aligned}
 b_2^\dagger b_2 &= (\sqrt{1-\eta} a_1^\dagger - \sqrt{\eta} a_2^\dagger)(\sqrt{1-\eta} a_1 - \sqrt{\eta} a_2) \\
 &= (1-\eta) a_1^\dagger a_1 + \eta a_2^\dagger a_2 - \sqrt{\eta} \sqrt{1-\eta} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \\
 b_1^\dagger b_1 &= (\sqrt{\eta} a_1^\dagger + \sqrt{1-\eta} a_2^\dagger)(\sqrt{\eta} a_1 + \sqrt{1-\eta} a_2) \\
 &= \eta a_1^\dagger a_1 + (1-\eta) a_2^\dagger a_2 + \sqrt{\eta} \sqrt{1-\eta} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)
 \end{aligned}$$

Når vi så skal regne ut $\langle n0 | b_2^\dagger b_2 b_1^\dagger b_1 | n0 \rangle$, husk at $a_2 | n0 \rangle = \langle n0 | a_2^\dagger = 0$, og $a_1^\dagger a_1 | n0 \rangle = n | n0 \rangle$:

$$\begin{aligned}
 \langle n0 | b_2^\dagger b_2 b_1^\dagger b_1 | n0 \rangle &= \langle n0 | (1-\eta) \eta a_1^\dagger a_1 a_1^\dagger a_1 - \eta (1-\eta) a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 | n0 \rangle \\
 &= (1-\eta) \eta [n^2 - \langle 0, n | a_1^\dagger a_1 (1 + a_2^\dagger a_2) | 0, n \rangle] \\
 &= \eta (1-\eta) n (n-1).
 \end{aligned}$$

Vi har brukt at $[a_2, a_2^\dagger] = 1$ og at modiene a_1 og a_2 er uavhengige og kommuterer (likn. (15) i artikkelen).

c) Bruk stråledeleren i likn. (11) (fig. 3), sett $\eta = 1/2$. Matrisen for dobbeltsporslogikk blir identisk til den klassiske matrisen siden det bare er ett foton til stede

(en mulig vei for hver overgang) og normaliseringsfaktoren er 1 (jfr. diskusjonen på s. 1388). I dobbeltspors-representasjonen får vi

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

d) $H^2 = I$.

e) Matrisen for faseskiftet blir

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

i dobbeltspor-representasjon. Dette kan begrunnes på samme måte som i oppg. c); det er bare ett foton til stede og en mulig vei. Responsen fra Mach-Zehnder interferometeret blir

$$HPH = e^{i\varphi/2} \begin{bmatrix} \cos \varphi/2 & -i \sin \varphi/2 \\ -i \sin \varphi/2 & \cos \varphi/2 \end{bmatrix}$$

For $\varphi = \pi$ blir dette en X -port (kvante-NOT) (hvis vi ser bort fra en global fase).

f) Fra forrige oppgave vet vi at dersom vi får et faseskift på π i armen på interferometeret vil de to modiene bli byttet om, dvs. vi får en NOT-operasjon i dobbeltspors-representasjonen. Siden Kerr-mediet gir π faseskift hvis modus 4 inneholder et foton, fåes en CNOT. Vi får en Fredkin-port dersom vi lar de tre nederste modiene være hver sin kvantebit siden et foton i den øverste av de tre får de to nederste modiene til å byttes om.