SIE40AN: Kvantedatamaskiner og kvantekommunikasjon

Løsningsforslag øving 8

4.33

Vis at den angitte kretsen med målinger i "computational basis" tilsvarer målinger i Bell-basisen.

Å måle i databasisen ("computational basis") tilsvarer å måle med projektorene $P_n^C = |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$, hvor

$$|\phi_1\rangle = |00\rangle \qquad |\phi_2\rangle = |01\rangle \qquad |\phi_3\rangle = |10\rangle \qquad |\phi_4\rangle = |11\rangle,$$

og å måle i Bellbasisen tilsvarer å måle med projektorene $P_n^B = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, hvor

$$|\psi_1\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |\psi_2\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$|\psi_3\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |\psi_4\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Kretsen bestående av en CNOT-port etterfulgt av en Hadamardport på første qubit tilsvarer operasjonen

$$U = (H \otimes I) \cdot (\textsc{cnot}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anta nå at vi har en inntilstand $|\psi_{\text{inn}}\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$. Effekten på denne av U er

$$U \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \delta \\ \beta + \gamma \\ \alpha - \delta \\ \beta - \gamma \end{pmatrix}.$$

Dermed vil en måling i databasisen nå gi for de forskjellige n:

$$P_n^C U|\psi_{\text{inn}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} (\alpha + \delta)|\phi_1\rangle \\ (\beta + \gamma)|\phi_2\rangle \\ (\alpha - \delta)|\phi_3\rangle \\ (\beta - \gamma)|\phi_4\rangle \end{cases}$$

Tilsvarende vil en måling i Bellbasisen på to qubit som ikke gjennomgår operasjonen U gi:

$$P_n^B|\psi_{\text{inn}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{cases} (\alpha+\delta)|\psi_1\rangle \\ (\beta+\gamma)|\psi_2\rangle \\ (\alpha-\delta)|\psi_3\rangle \\ (\beta-\gamma)|\psi_4\rangle \end{cases}$$

Altså er de to målingene ekvivalente.

7.6

Vis at en koherent tilstand er en egentilstand til annihilasjonsoperatoren a, og at kreasjonsoperatoren $a^\dagger$ ikke har noen normalisert egenvektor.

En koherent tilstand er definert som

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

og ved å bruke at $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ får en at

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}a|n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= \alpha|\alpha\rangle. \end{aligned}$$

Altså er $|\alpha\rangle$ en egentilstand til a med egenverdi $\lambda = \alpha$.

La nå $|\gamma\rangle$ være en potensiell egenvektor til $a^\dagger$. Denne kan utvikles i n-tilstandene, $|\gamma\rangle = \sum_n \gamma_n|n\rangle$. Dvs. at det må finnes en laveste n-tilstand $|n_0\rangle$ i denne summen (summen kan godt være uendelig oppad, men det finnes ingen n-tilstander med negativ n!). Ved å virke på denne med $a^\dagger$ får vi

$$a^\dagger|\gamma\rangle = \sum_{n=n_0}^{\infty}\gamma_n a^\dagger|n\rangle = \sum_{n=n_0}^{\infty}\gamma_n\sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Altså er laveste n-tilstand blitt til $|n_0+1\rangle$, og dette kan ikke være en egenvektor til $a^\dagger$.

7.14

Vis formlene (7.50)–(7.52) og vis at $m = |\beta|^2$ er det dominerende bidraget til summen (7.52).

La oss først klargjøre notasjonen som er brukt; her er $a^\dagger$ og a hhv. heve– og senke-operatorer i et Hilbertrom $\mathcal{H}_1$, og $b^\dagger$ og b heve– og senke-operatorer i et Hilbertrom $\mathcal{H}_2$. Videre er $|\alpha\rangle$ en koherent tilstand i $\mathcal{H}_1$, $|\beta\rangle$ en koherent tilstand i $\mathcal{H}_2$ og $|n\rangle$ en n-tilstand i $\mathcal{H}_2$. Til slutt indikerer $\mathrm{Tr}_b[\,\cdot\,]$ sporet over $\mathcal{H}_2$.

Vi har at $K = e^{i\chi L a^\dagger a b^\dagger b}$, og ved å bruke at $b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle$, får vi

$$K|\alpha\rangle|n\rangle = e^{i\chi L a^\dagger a n}|\alpha\rangle|n\rangle.$$

Videre har vi at med et vilkårlig tall κ, er

$$e^{i\kappa a^\dagger a}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}e^{i\kappa m}|m\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha e^{i\kappa}\right)^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle = |\alpha e^{i\kappa}\rangle,$$

slik at ved å identifisere $\kappa = \chi L n$, får vi at

$$K|\alpha\rangle|n\rangle = |\alpha e^{i\chi L n}\rangle|n\rangle.$$

Dette resultatet gir direkte at

$$K|\alpha\rangle|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^m}{\sqrt{m!}}|\alpha e^{i\chi L m}\rangle|m\rangle.$$

Derfor blir altså

$$K|\alpha\rangle|\beta\rangle\langle\beta|\langle\alpha|K^\dagger = e^{-|\beta|^2/2}\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{\beta^m}{\sqrt{m!}}|\alpha e^{i\chi L m}\rangle|m\rangle\langle k|\langle\alpha e^{i\chi L k}|\frac{\beta^{*k}}{\sqrt{k!}}e^{-|\beta|^2/2},$$

og

$$\rho_a = e^{-|\beta|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\beta|^{2m}}{m!}|\alpha e^{i\chi L m}\rangle\langle\alpha e^{i\chi L m}|.$$

Det dominerende bidraget i denne summen er der $s_m \equiv \frac{|\beta|^{2m}}{m!}$ er størst. Se nå på forholdet

$$\frac{s_{m+1}}{s_m} = \frac{|\beta|^{2m}|\beta|^2/(m+1)m!}{|\beta|^{2m}/m!} = \frac{|\beta|^2}{m+1}.$$

Dette er lik én når $m = |\beta|^2 - 1$, og ekte mindre enn én hvis og bare hvis $m > |\beta|^2 - 1$. Dette betyr at for m mindre enn dette må rekken være stigende. Altså får vi et maksimum rundt $m = |\beta|^2$. Mer presist, generelt er jo ikke $|\beta|^2$ et heltall, slik at da gir argumentasjonen over at den største verdien av s_m kommer for den største m som er mindre eller lik $|\beta|^2$. Dersom $|\beta|^2$ er et heltall, vil $m = |\beta|^2 - 1$ og $m = |\beta|^2$ begge gi samme verdi.